

# MĚŘENÍ MODULU PRUŽNOSTI VE SMYKU DYNAMICKOU METODOU

## Pracovní úkol:

1. Stanovte dynamickou metodou modul pružnosti ve smyku daného drátu
2. Proveďte rozbor přesnosti a stanovte chybu měření

**Pomůcky:** stojan s čelistmi pro upevnění drátu, drát, přídatné těleso ("motýlek"), 4 kovové kuličky, měřítko, odpichovátko, stopky, váhy a sada závaží, mikrometr

## Teorie:

Namáhání ve smyku vzniká, působí-li síla v rovině řezu. Smyk se zpravidla vyskytuje společně s ohybem. V této úloze se budeme zabývat případy, kdy účinek ohybu je tak malý, že ho můžeme proti smyku zanedbat. Při experimentu bude docházet ke zkroucení (torzi) drátu, na němž bude zavěšeno těleso.

Těleso zavěšené na drátu (tyči) koná *torzní kmity* (těleso se střídavě otáčí kolem svislé osy na jednu a na druhou stranu). Takový pohyb lze popsat pohybovou rovnicí (tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy):

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_T \quad (1)$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející tyčí je označen  $J$ ,  $\varphi$  je úhel otočení tělesa z klidové polohy,  $t$  čas a  $M_T$  moment síly (vyvolaný torzí) vůči ose otáčení. Z Hookova zákona lze odvodit, že na zkroucení tyče délky  $l$  a poloměru  $r$  o úhel  $\varphi$  je potřeba působit momentem síly o velikosti  $M$  o velikosti:

$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot l} \cdot \varphi, \quad (2a)$$

kde  $G$  je **modul pružnosti ve smyku** (Coulombův modul). Při zkroucení tyče musíme působit momentem síly  $M$ , abychom překonali moment síly  $M_T$  vyvolaný torzní deformací. Moment síly  $M_T$ , vyvolaný v materiálu v důsledku torze, působí proti deformaci a snaží se uvést materiál do původního, nedeformovaného stavu. Tento moment síly je odpovědný za kmitavý pohyb. Platí:

$$M_T = -M = -\frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot l} \cdot \varphi \quad (2b)$$

Z toho důvodu je v pohybové rovnici znaménko mínus. Po dosazení vztahu (2b) do rovnice (1) dostáváme pohybovou rovnici torzních kmitů tělesa.

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot l} \cdot \varphi \quad (3)$$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pohybovou rovnici (3) lze přepsat a upravit do podoby:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot J \cdot l} \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

Řešením rovnice (4) jsou malé torzní kmity s úhlovou frekvencí  $\omega$ :

$$\omega^2 = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot J \cdot l} \quad (5)$$

S použitím známého vztahu pro úhlovou frekvenci  $\omega$ :

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \quad (6)$$

kde  $T$  je perioda kmitů, dospějeme k výslednému vztahu pro stanovení modulu pružnosti drátu ve smyku:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot J \cdot l}{r^4 \cdot T^2} \quad \text{nebo} \quad G = \frac{128 \cdot \pi \cdot J \cdot l}{D^4 \cdot T^2}, \quad (7)$$

kde  $D$  je průměr drátu.

Pro stanovení modulu pružnosti ve smyku podle vztahu (7) potřebujeme znát moment setrvačnosti kmitajícího tělesa. Pokud moment setrvačnosti tělesa neznáme, můžeme použít následující trik. Změříme periodu kmitů s původním tělesem. Dále k tělesu připevníme přídatné těleso o známém momentu setrvačnosti  $J_1$ , který můžeme jednoduše vypočítat z hmotnosti a geometrických rozměrů přídatného tělesa. Pro moment setrvačnosti tělesa s přídatným tělesem platí vztah:

$$J_s = J + J_1 \quad (8)$$

Dobu kmitu tělesa spolu s přídatným tělesem označíme  $T_s$ . Ze vztahu (7) lze odvodit vztah pro hledaný moment setrvačnosti  $J$ :

$$J = \frac{T^2}{T_s^2 - T^2} \cdot J_1 \quad (9)$$

S použitím vztahu (9) lze vztah (7) pro výpočet modulu pružnosti ve smyku přepsat do podoby:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot l \cdot J_1}{r^4 \cdot (T_s^2 - T^2)} \quad \text{nebo} \quad G = \frac{128 \cdot \pi \cdot l \cdot J_1}{D^4 \cdot (T_s^2 - T^2)} \quad (10)$$

Pro měření použijeme těleso ve tvaru „motýlka“ s momentem setrvačnosti  $J$ . Jako přídatné těleso použijeme 4 kusy stejných kovových kuliček umístěných v otvorech symetricky rozmístěných okolo osy otáčení (viz. obrázek 1).

Pro moment setrvačnosti 4 takto rozmístěných kuliček platí vztah:

$$J_1 = 4 \cdot \left( \frac{2}{5} \cdot m \cdot \rho^2 + m \cdot a^2 \right), \quad (11)$$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

kde  $m$  je hmotnost jedné kuličky,  $\rho$  její poloměr,  $a$  vzdálenost středu kuličky od osy rotace.

### Pokyny pro měření:

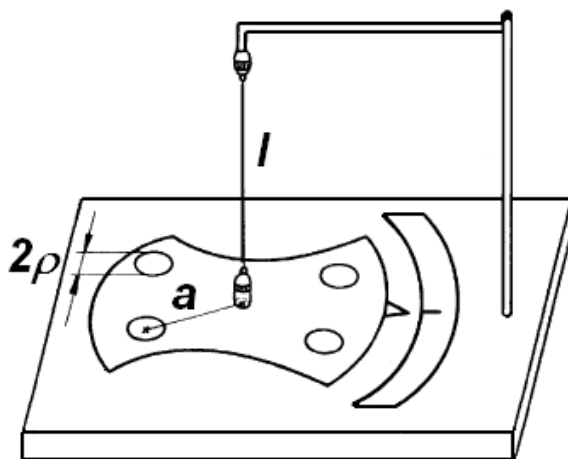
- 1) Urovnejte měřicí aparaturu do vodorovné polohy a změřte 10x průměr a délku drátu.
- 2) Na laboratorních vahách metodou tří kyvů zvažte kuličky (všechny najednou). Určete hmotnost jedné kuličky  $m$  včetně chyby.
- 3) Stanovte periodu  $T$  kmitů samotného tělesa („motýlku“). Měřte vždy minimálně 20 kmitů (period) a měření 10x opakujte.
- 4) Stanovte periodu  $T_S$  kmitů tělesa s přidanými kuličkami. Měřte vždy minimálně 20 kmitů (period) a měření 10x opakujte.
- 5) Pomocí vztahů (10) a (11) stanovte modul pružnosti  $G$  materiálu drátu ve smyku.
- 6) Určete chyby měření. Odvozené vzorce uveďte do protokolu.  
Pro výpočet chyby měření modulu pružnosti použijte kvadratický zákon hromadění chyb:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right) \cdot \sigma_l\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial J_1}\right) \cdot \sigma_{J_1}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \cdot \sigma_r\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial T_S}\right) \cdot \sigma_{T_S}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) \cdot \sigma_T\right)^2}, \quad (12)$$

kde jednotlivé parciální derivace získáte derivováním vztahu (10) a mezní chybu momentu setrvačnosti  $J_1$  určíte ze vztahu:

$$\sigma_{J_1} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial J_1}{\partial m}\right) \cdot \sigma_m\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial J_1}{\partial \rho}\right) \cdot \sigma_\rho\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial J_1}{\partial a}\right) \cdot \sigma_a\right)^2},$$

kde jednotlivé parciální derivace získáme derivováním vztahu (11).



Obrázek č. 1: Aparatura pro stanovení modulu pružnosti ve smyku

### Literatura:

- Kopal, A. a kol., *Fyzika I*. TUL, Liberec, 2009, ISBN 978-80-7372-477-1
- Kolektiv autorů, *Úvod do fyzikálních měření*. TUL, LIBEREC, 2012, ISBN 978-80-7372-819-9



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ