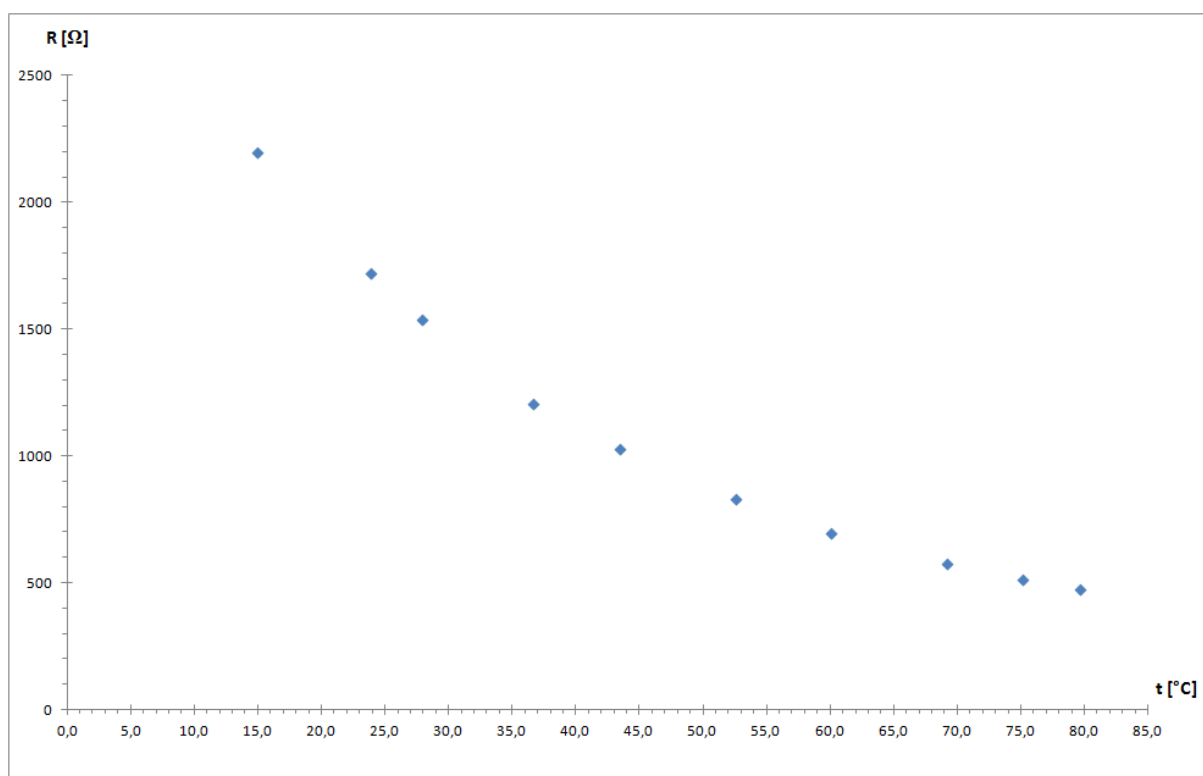


## Aproximace funkce - linearizace

Častým úkolem je aproximace naměřené závislosti fyzikálních veličin známou funkcí  $f(x)$ , která však není lineární. V řadě případů ale lze tuto funkci tzv. *linearizovat*.

Příklad: Bylo provedeno měření závislosti elektrického odporu polovodiče na teplotě (naměřená data viz. tabulka). Určete materiálové konstanty tohoto polovodiče.

<b>t [°C]</b>	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
<b>R [Ω]</b>	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475



### Postup řešení:

Pro elektrický odpor polovodiče platí vztah  $R = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$ , kde  $T[K]$  je termodynamická teplota,  $A[\Omega]$  a  $B[K]$  jsou materiálové konstanty polovodiče.

Tento vztah převedeme do „lineární podoby“ pomocí logaritmování:

$$\ln R = \ln A + B \cdot \frac{1}{T}$$

Vztah můžeme porovnat s rovnicí přímky  $y = q + k \cdot x$ :

$$y \rightsquigarrow \ln R, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{T}, \quad k = B, \quad q = \ln A,$$

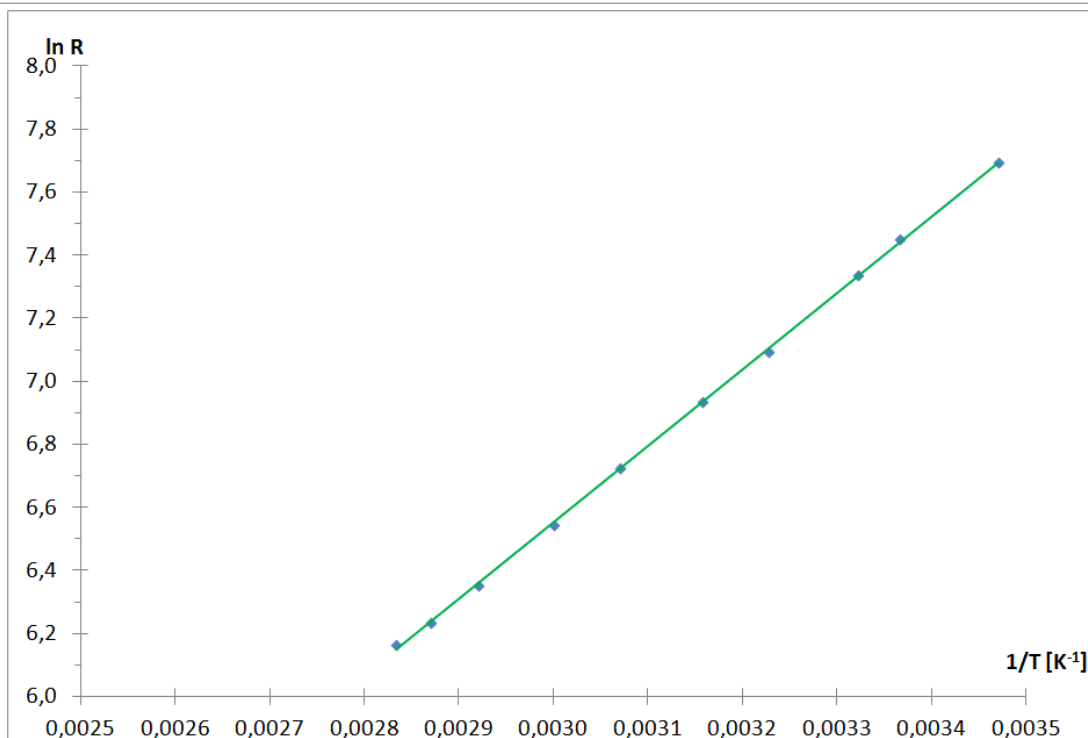
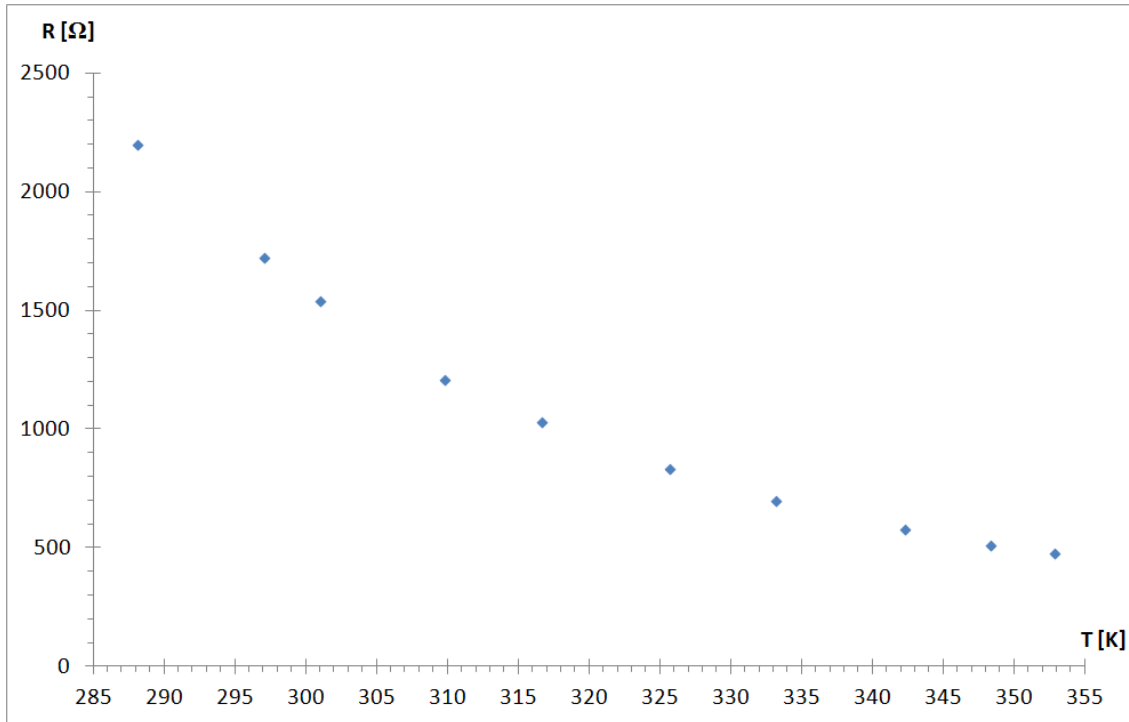
neboli  $B = k$ ,  $A = e^q$ .

# Aproximace funkce - linearizace

Pro chyby materiálových koeficientů  $A$  a  $B$  pak můžeme odvodit vztahy:

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\frac{\partial(k)}{\partial k} \cdot \sigma_k\right)^2} = \sigma_k$$
$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial(e^q)}{\partial q} \cdot \sigma_q\right)^2} = e^q \cdot \sigma_q$$

Grafy závislosti  $R = f(T)$  a  $\ln R = f(1/T)$ :



# Aproximace funkce - linearizace

Zpracování v EXCELu:

Vytvoříme tabulku s naměřenými hodnotami doplněnou o řádky  $\ln R$  a  $T^{-1}$ :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
3		R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
4		ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
5		T <sup>-1</sup> [K <sup>-1</sup> ]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065
6												

Lineární regresí zpracujeme závislost  $\ln R = f(1/T)$  pomocí funkce LINREGRESE(...):

The screenshot shows the Excel interface with the formula bar containing `=LINREGRESE(C4:L4;C5:L5;;1)`. A dialog box titled "Argumenty funkce" is open, showing the following details:

- LINREGRESE**
- Pole\_y**: C4:L4 = {7,69439280262942;7,45066079621...}
- Pole\_x**: C5:L5 = {0,00347041471455839;0,0033664366...}
- B**: = logická
- Stat**: 1 = PRAVDA

Below the arguments, it shows the regression equation:  $y = \{2432,04263326564;-0,745005167441\}x + \{2432,04263326564;-0,745005167441\}$ . The result is displayed as "Výsledek = 2432,042633".

# Aproximace funkce - linearizace

Pro výpočet podle maticového vzorce je nutné na závěr stisknout trojkombinaci kláves **CTRL + SHIFT + ENTER**. Dostaneme potom hodnoty regresních koeficientů a jejich chyb:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
3		R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
4		ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
5		T <sup>-1</sup> [K <sup>-1</sup> ]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065
6												
7												
8			2432,04263	-0,74500517								
9			12,9808844	0,04064343								
10			0,99977215	0,00858394								
11												

Dále určíme Studentův součinitel s parametry  $P = 95\%$  a  $(n-1)$ , v našem případě  $t_{P,n-1} = \text{TINV}(0,05;8)$ :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
3		R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
4		ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
5		T <sup>-1</sup> [K <sup>-1</sup> ]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065
6												
7												
8			2432,04263	-0,74500517	<b>Studentův součinitel</b>	=TINV(1-95/100;(POČET(C4:L4)-1)-1)						
9			12,9808844	0,04064343	pro P=95%							
10			0,99977215	0,00858394								
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												

Argumenty funkce

TINV

**Prst** 1-95/100 = 0,05

**Volnost** (POČET(C4:L4)-1)-1 = 8

= 2,306004133

Vrátí inverzní funkci k distribuční funkci Studentova t-rozdělení.

**Volnost** je kladné celé číslo představující počet stupňů volnosti, které určují rozdělení.

Výsledek = 2,306004133

[Nápověda k této funkci](#)

OK Storno

# Aproximace funkce - linearizace

Určíme intervaly spolehlivosti regresních koeficientů a korelační koeficient:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
3		R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
4		ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
5		T <sup>-1</sup> [K <sup>-1</sup> ]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065
6												
7												
8			2432,04263	-0,74500517	Studentův součinitel		2,30600413		s <sub>k</sub> :	29,9339731		
9			12,9808844	0,04064343		pro P=95%			s <sub>q</sub> :	0,09372391		
10			0,99977215	0,00858394					r <sub>xy</sub> :	0,99988607		
11												
12												

Z velikosti korelačního koeficientu  $r_{x,y}$  je zřejmé, že prokládání závislosti  $\ln R = f(1/T)$  přímkou je oprávněné. Zbývá jen pomocí výše odvozených vzorců (str. 1) vypočítat materiálové koeficienty  $A$  a  $B$  a jejich chyby:

$$\sigma_B = \sigma_k = 29,9339731 \doteq 30 \text{ K}$$

$$B = k = 2432,04263 \doteq 2430 \text{ K}$$

$$\sigma_A = e^q \cdot \sigma_q = e^{-0,74500517} \cdot 0,09372391 = 0,044493724 \doteq 0,04 \Omega$$

$$A = e^q = e^{-0,74500517} = 0,474731845 \doteq 0,47 \Omega$$

Naměřená data lze tedy aproximovat funkcí  $R = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$ , kde  $A = (0,47 \pm 0,04) \Omega$  a  $B = (2430 \pm 30) \text{ K}$ .

