

# MĚŘENÍ MĚRNÉHO NÁBOJE ELEKTRONU

## Pracovní úkol:

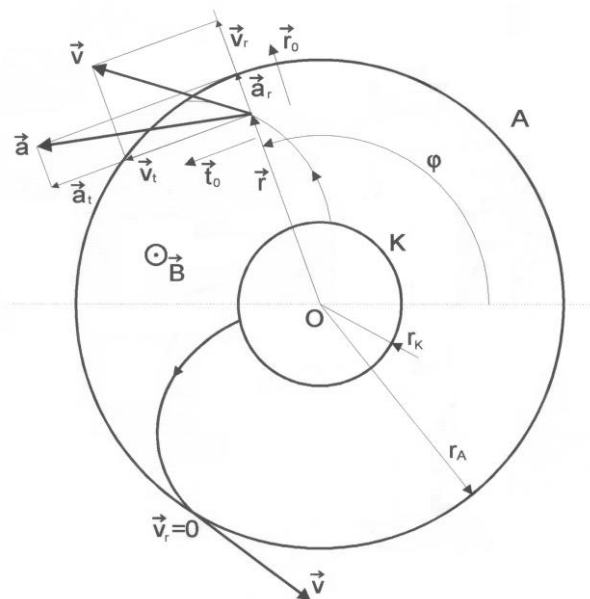
- 1) Změřte závislost anodového proudu  $I_A$  na velikosti indukce magnetického pole  $B$  pro několik hodnot anodového napětí  $U_A$ .
- 2) Graficky zpracujte závislosti  $I_A=f(B)$  a  $\frac{dI_A}{dB} = f(B)$ .
- 3) Stanovte hodnotu měrného elektrického náboje elektronu  $\frac{e}{m_e}$ .
- 4) Porovnáním s tabulkovou hodnotou odhadněte, které platné místo naměřené hodnoty  $\frac{e}{m_e}$  je zatíženo chybou.

## Pomůcky:

Přípravek s diodou DY 87 včetně napájecího zdroje žhavicího a anodového napětí, solenoid, zdroj stejnosměrného proudu, miliampérmetr, mikroampérmetr, voltmetr

## Teorie:

Pro měření měrného náboje elektronu je využito elektronky se souose umístěnými elektrodami podle obrázku 1 umístěné v homogenním magnetickém poli o velikosti magnetické indukce  $B$ . Směr magnetické indukce  $B$  je totožný se směrem osy elektronky. Elektrony emitované z katody o poloměru  $r_k$  jsou urychlovány elektrickým napětím mezi elektrodami. Bez přítomnosti magnetického pole by se pohybovaly ve směru normály ke katodě. Magnetické pole vlivem Lorentzovy síly zakřivuje dráhu letu elektronu do tvaru části spirály. Zakřivení dráhy elektronů roste s velikostí magnetické indukce  $B$ . Při určité hodnotě magnetické indukce  $B_c$  již elektrony nedopadají na anodu, protože jejich pohyb přejde v pohyb po kružnici.



Obrázek 1: Schéma uspořádání elektrod s vyznačením trajektorie elektronu

Při odvození vztahu pro výpočet měrného elektrického náboje budeme předpokládat:

- anoda i katoda jsou válcového tvaru
- katoda je uzemněná, mezi elektrodami je elektrické napětí  $U_A$
- elektrony vyletující z katody mají nulovou rychlost v případě nulového napětí mezi elektrodami  $U_A$
- elektron se pohybuje ve vakuu
- magnetické pole cívky je homogenní
- elektron má náboj  $e$  a hmotnost  $m_e$

Na elektron ve vzdálenosti  $r$  od středu elektronky působí síly elektrická a magnetická.

$$\vec{F} = -e \cdot \vec{E} - e \cdot (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (1)$$

Pro zjednodušení výpočtu je vhodné pracovat s radiálními (normálovými) a tečnými složkami.

Radiální složka (elektrická a magnetická síla v této složce mají opačný směr):

$$F_r = -e \cdot E + e \cdot B \cdot v_t, \quad (2)$$

kde  $e$  je velikost náboje elektronu,  $E$  je intenzita elektrického pole,  $B$  magnetická indukce,  $r$  poloměr dráhy a  $v_t$  tečná složka rychlosti.

Tečná složka:

$$F_t = -e \cdot B \cdot v_r, \quad (3)$$

kde  $v_r$  představuje radiální složku rychlosti.

Pohybové rovnice mají tvar:

$$F_r = m_e \cdot a_r = e \cdot (-E + B \cdot r \cdot \omega), \text{ kde } v_t = r \cdot \omega \quad (4)$$

$$F_t = m_e \cdot a_t = -e \cdot B \cdot v_r \quad (5)$$

V polárních souřadnicích pro složky zrychlení platí:

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2 \quad (6)$$

$$a_t = 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi} + r \cdot \ddot{\phi} \quad (7)$$

(Tečky představují derivace podle času.) Po dosazení rovnic výrazů (6) a (7) do rovnic (4) a (5) a převedení hmotnosti na pravou stranu dostáváme:

$$\ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2 = \frac{e}{m_e} \cdot (-E + B \cdot r \cdot \dot{\phi}) \quad (8)$$

$$2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi} + r \cdot \ddot{\phi} = -\frac{e}{m_e} \cdot B \cdot \dot{r} \quad (9)$$

Rovnici (9) vynásobíme poloměrem dráhy  $r$ :

$$2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi} + r^2 \cdot \ddot{\phi} = -\frac{e}{m_e} \cdot B \cdot r \cdot \dot{r} \quad (10)$$

Levá strana rovnice (10) se rovná derivaci výrazu  $r^2 \cdot \dot{\phi}$  podle času a součin  $r \cdot \dot{r}$  na pravé straně je roven polovině derivace  $r^2$  podle času.

$$2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi} + r^2 \cdot \ddot{\phi} = \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\phi}) \quad (11a)$$

$$r \cdot \dot{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} r^2 \quad (11b)$$

Rovnici (10) pak lze s pomocí výrazů (11a) a (11b) přepsat do podoby:

$$\frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\phi}) = -\frac{e}{m_e} \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{d}{dt} r^2 \Rightarrow d(r^2 \cdot \dot{\phi}) = -\frac{e}{m_e} \cdot \frac{B}{2} \cdot d(r^2) \quad (12)$$

Poloměr dráhy leží mezi poloměrem katody  $r_K$  a poloměrem anody  $r_A$ . Integrací výrazu (12) v těchto mezích získáme integrální rovnici:

$$r_A^2 \cdot \dot{\phi}_A - r_K^2 \cdot \dot{\phi}_K = -\frac{e \cdot B}{2 \cdot m_e} \cdot (r_A^2 - r_K^2), \quad (13)$$

kde  $\dot{\phi}_K$  a  $\dot{\phi}_A$  jsou úhlové rychlosti elektronů u katody a anody. Z našeho předpokladu plyne nulová rychlost uvolněného elektronu z katody, proto jsou radiální a tečné složky nulové. Platí  $\dot{\phi}_K = 0$ . Nemá-li elektron dopadnout na anodu, musí být radiální složka rychlosti v blízkosti anody nulová a pro tečnou složku platit:

$$v_A = r_A \cdot \dot{\phi}_A. \quad (14)$$

Vztah (13) se zjednoduší na tvar:

$$r_A \cdot v_A = -\frac{e \cdot B_k}{2 \cdot m_e} \cdot (r_A^2 - r_K^2), \quad (15)$$

kde  $B_k$  představuje kritickou hodnotu magnetické indukce, kdy dochází k poklesu anodového proudu  $I_A$  na nulu. Vztah (15) lze upravit do podoby:

$$r_A \cdot v_A = -\frac{e \cdot B_k}{2 \cdot m_e} \cdot \left(1 - \left(\frac{r_K}{r_A}\right)^2\right) \cdot r_A^2, \quad (16)$$

Magnetická síla působí kolmo k trajektorii, tedy nekoná práci. Elektron získává energii pouze na základě působení elektrické síly. Z přírůstku kinetické energie elektronu lze vyjádřit velikost tečné složky rychlosti:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= W_e \\ \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_A^2 &= e \cdot U_A \\ v_A &= \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_A}{m_e}} \end{aligned} \quad (17)$$

Vztah (17) dosadíme do vztahu (16):

$$\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_A}{m_e}} = -\frac{e \cdot B_k}{2 \cdot m_e} \cdot \left(1 - \left(\frac{r_K}{r_A}\right)^2\right) \cdot r_A, \quad (18)$$

Výraz (18) umocníme na druhou a vyjádříme podíl  $\frac{e}{m_e}$ :

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot e \cdot U_A}{m_e} &= -\frac{e^2 \cdot B_k^2}{4 \cdot m_e^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r_K}{r_A}\right)^2\right)^2 \cdot r_A^2 \\ -\frac{8 \cdot U_A}{B_k^2 \cdot r_A^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_K}{r_A}\right)^2\right)^2} &= \frac{e}{m_e}, \end{aligned} \quad (19)$$

Za předpokladu, že poloměr katody  $r_K$  je výrazně menší než poměr anody  $r_A$ , lze aproximovat zlomek:

$$\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_K}{r_A}\right)^2\right)^2} \cong 1 \quad (20)$$

A výsledný vztah získá finální podobu:

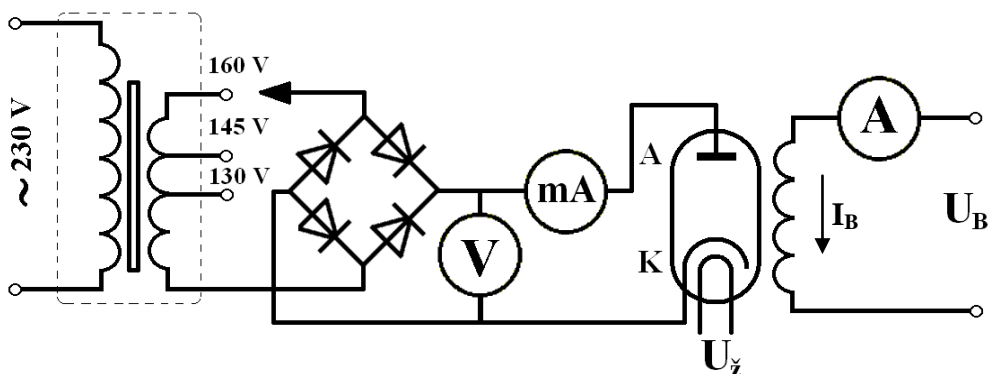
$$\frac{8 \cdot U_A}{B_k^2 \cdot r_A^2} = \frac{|e|}{m_e}, \quad (21)$$

### **Měřicí aparatura:**

Pro měření je použito vakuové diody DY 87, která splňuje požadavky teoretického rozboru. Pro vytváření magnetického pole slouží solenoid, uvnitř něhož je dioda umístěna tak, aby osa diody splývala s osou solenoidu. Velikost magnetické indukce  $B$  odpovídá elektrickému proudu procházejícímu solenoidem podle vztahu:

$$B = k \cdot I_B, \quad (22)$$

kde  $k=13,65 \text{ mT} \cdot \text{A}^{-1}$ . Změnou napětí  $U_B$  se reguluje elektrický proud  $I_B$  solenoidem.



Obrázek 2: Elektrické zapojení měřícího přípravku obsahuje.

**Pokyny pro měření:**

- 1) Nastavte anodové napětí na první hodnotu.
- 2) Proměřte závislost anodového proudu  $I_A$  na velikosti magnetické indukce  $B$ . Nepřekračujte hodnotou proudu 2 A!
- 3) Opakujte měření pro zbylé dvě hodnoty anodového napětí.

**Pokyny pro zpracování:**

Okamžitý pokles anodového proudu  $I_A$  by nastal, jen pokud by všechny elektrony vystupovaly z katody se stejnou rychlostí. Protože rychlost emitovaných elektronů odpovídá normálnímu rozdělení (viz úloha Rychlostní rozdělení elektronů ve Fyzikálním praktiku 3) jsou i rychlosti elektronů v okolí anody různé. Proto i v ideálních podmínkách nenastává ostrý pokles anodového proudu. Hodnotu kritické magnetické indukce berete jako bod v místě nejstrmějšího poklesu anodového proudu v závislosti  $I_A=f(B)$ . Proved'te grafickou derivaci závislosti anodového proudu v závislosti  $I_A=f(B)$  podle magnetické indukce. Extrém na derivaci odpovídá kritické magnetické indukci  $B_k$  tj. místu s největším poklesem anodového proudu.

**Parametry úlohy:**

Žhavicí napětí:  $U_z=1,5$  V

Poloměr anody:  $r_A=4,625 \cdot 10^{-3}$  m

Maximální přípustná hodnota cívkou:  $I_m=2$  A

Konstanta solenoidu (indukčnost)  $k=13,65$  mT·A<sup>-1</sup>