

MATEMATICKÉ KYVADLO

Pracovní úkol

1. Určete dobu kmitu matematického kyvadla v závislosti na jeho délce pro 10 různých délek (cca od 50 do 90 cm). $l = 10 + 0.9 \text{ cm}$
2. Sestrojte graf závislosti doby kmitu matematického kyvadla T na délce kyvadla l a graf závislosti doby kmitu matematického kyvadla T na odmocnině délky kyvadla \sqrt{l} .
3. Z naměřených dat určete pomocí lineární regrese hodnotu tíhového zrychlení g včetně chyby měření. Výsledky porovnejte s tabulkovou hodnotou.

Pomůcky

Závaží, vlákno, stojan s držákem, metr, čítač s optickou závorou.

Teorie

Matematické kyvadlo je modelem kyvadla. Rozumíme jím hmotný bod zavěšený na vlákně zanedbatelné hmotnosti. Zanedbáváme také odpor vzduchu i tření v závěsu.

Pokud je amplituda úhlové výchylky α dostatečně malá ($\alpha < 5^\circ$), lze použít pro periodu matematického kyvadla vztah:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

kde l je délka kyvadla a g je tíhové zrychlení.

Vztah (1) je také možné přepsat do podoby:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l}, \quad (2)$$

z něhož je patrné, že závislost doby kmitu matematického kyvadla T na odmocnině délky kyvadla \sqrt{l} je lineární. Srovnáme-li tuto závislost s rovnicí přímky $y = k \cdot x + q$, dostaneme:

$$y \rightarrow T, \quad x \rightarrow \sqrt{l}, \quad k \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{g}}, \quad q = 0$$

Periodu kmitání určíme se změřené frekvence kmitů f_k jako:

$$T = 1/f_k \quad (3)$$

Pro tíhové zrychlení určené pomocí lineární regrese budou tedy platit vztahy:

$$g = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \quad (4)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial k} \cdot \sigma_k \right)^2} = \left| (2\pi)^2 \cdot (-2) \cdot k^{-3} \cdot \sigma_k \right| = \underline{\underline{2 \cdot g \cdot \frac{\sigma_k}{k}}} \quad (5)$$

Postup měření

1. Změřte délku kyvadla l , tj. vzdálenost bodu závěsu od těžiště závaží. Odhadněte chybu měření délky σ_l .
2. Pomocí čítače nastaveného na odečítání frekvence s periodou 10s změřte frekvenci kmitání f_k kyvadla, které předtím rozkýváte s malou amplitudou výchylky (úhel vychýlení závěsu od svislého směru nesmí překročit 5°). Volíme spíše menší výchylku kyvadla, protože se méně projeví odpor vzduchu, který způsobuje pozorovatelný nárůst frekvence se zmenšováním výchylky.
3. Při měření frekvence vezmeme nejméně tři po sobě jdoucí hodnoty. První dvě hodnoty nepoužijeme, dochází k ustálení odečtu čítače a kývání kyvadla.
4. Celý postup opakujte pro jiné délky kyvadla. Všechny výsledky měření zapište do přehledné tabulky.

Postup zpracování

1. Určete aritmetický průměr z minimálně tří period kmitání T spočítané z frekvence kývání f_k , podle vztahu (3), včetně chyby $\sigma_{\bar{T}}$.
2. Sestrojte graf závislosti doby kmitu matematického kyvadla T na délce kyvadla l .
3. Sestrojte graf závislosti doby kmitu matematického kyvadla T na odmocnině délky kyvadla \sqrt{l} .
4. Proložte závislost doby kmitu matematického kyvadla T na odmocnině délky kyvadla \sqrt{l} přímkou $y = k \cdot x + q$, která prochází bodem $[0;0]$. Stanovte regresní koeficient k a jeho chybu σ_k .
5. Podle vztahů (4) a (5) vypočítejte hodnotu tíhového zrychlení g a jeho chybu σ_g .