

Stereologie

A 3D wireframe model of a cityscape, including a large rectangular building in the foreground and a taller cylindrical tower in the background. A green grid is overlaid on the scene, used for stereological analysis. The grid lines are visible on the surfaces of the buildings.

9. Vybrané charakteristiky struktury trojrozměrných objektů

David Lukáš, Petr Mikeš, Jana Horáková
2014

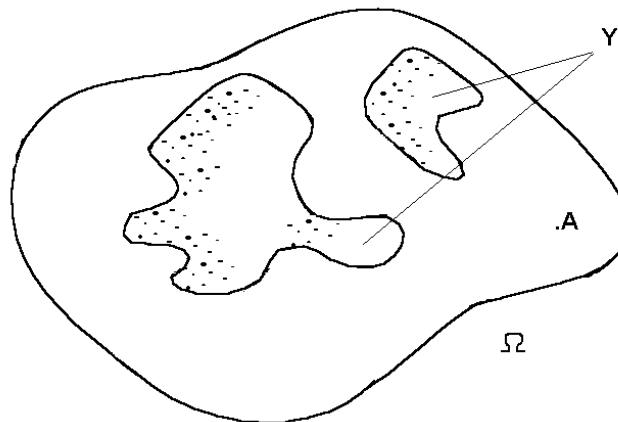
9.1 Zjišťování objemů trojrozměrných objektů pomocí bodové metody

V odstavci 6.5 jsme zmínili postup odhadu objemového zaplnění bodovou metodou vypracovanou Thomsonem a Glagolevem. Nyní se budeme zabývat odhady objemů trojrozměrných objektů.

Představme si referenční oblast Ω a v ní obsažený objekt Y , jak znázorňuje obr. 9.1.1 Podmíněná pravděpodobnost p , s jakou **rovnoměrně náhodný bod** A v oblasti Ω bude mít neprázdný průnik s objektem Y , je určena relací

$$p = \frac{V(Y)}{V(\Omega)}$$

kde $V(\Omega)$ je objem referenční oblasti Ω a $V(Y)$ je hledaný objem objektu Y .



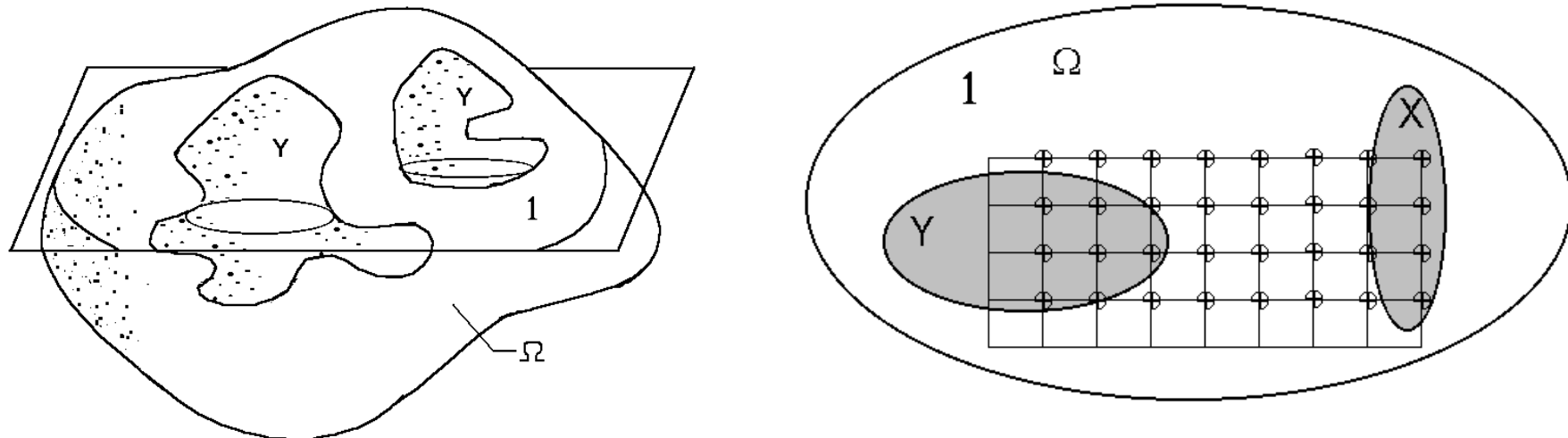
Obr. 9.1.1: V referenční oblasti Ω je obsažen trojrozměrný objekt Y . Bod A představuje jednorozměrný řez oblasti Ω .

Provedeme-li odhad $V(Y)$ z n rovnoměrně náhodných nularozměrných řezů, pak z (9.1.1) získáme

$$[V(Y)] = p \cdot \frac{n}{n} V(\Omega) = \frac{Q}{n} V(\Omega).$$

V rovnici (9.1.2) je součin $n \cdot p$ odhadnut počtem Q neprázdných průniků nularozměrných řezů a objektu Y .

K odhadu $V(Y)$ zpravidla využíváme izotropních a rovnoměrně náhodných dvojrozměrných řezů, ve kterých uskutečňujeme nularozměrné řezy užitím testovacích systémů s bodovou sondou, o kterých pojednává kapitola 7. Postup je znázorněn na obr. 9.1.2.



Obr. 9.1.2: Rovnoměrně náhodný a izotropní dvojrozměrný řez (1) referenční oblasti Ω obsahující objekt Y . V řezu jsou rozmístěny bodové sondy testovacího systému představující nularozměrné řezy. Celkový počet sond v dvojrozměrném řezu oblasti Ω je $n = 32$. Počet sond obsažených v řezu objektu Y je $Q = 10$.

Poměrovým odhadem $[V(Y)] / [V(\Omega)]$ je

$$\frac{[V(Y)]}{[V(\Omega)]} = \frac{Q}{n}$$

Vztah (9.1.3) je přímým důsledkem vztahu (9.1.2).

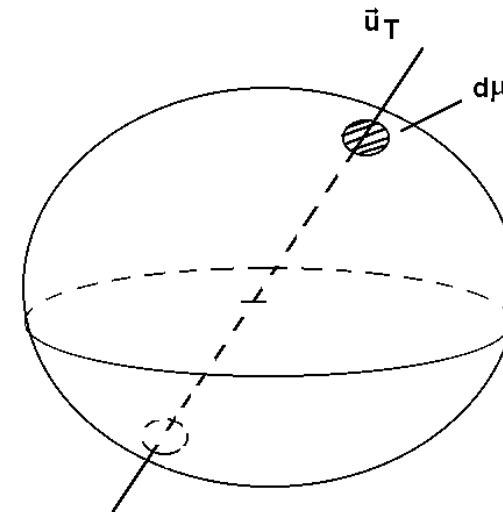
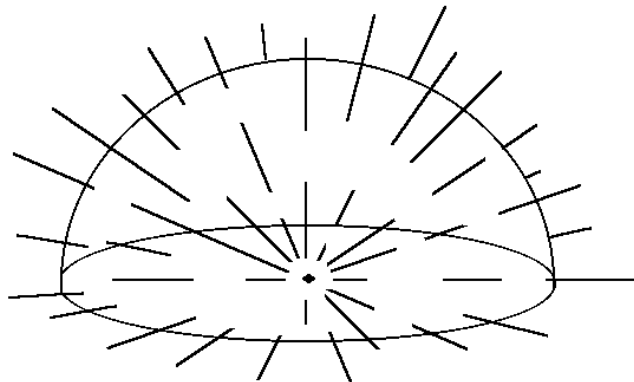
9.2 Zjišťování plošných obsahů hranic trojrozměrných objektů.

V referenční oblasti Ω o objemu $V(\Omega)$ se nachází nadplocha Y o plošném obsahu $S(Y)$. Pro odhad $S(Y)$ použijeme testovací úsečku (jehlu) T známé délky $L(T)$.

O jehle budeme předpokládat, že je **rovnoměrně náhodná a zároveň izotropní**. Znamená to, že pevný bod $x \in T$ je rovnoměrně náhodný v oblasti Ω a nezávisle na umístění T je orientace jehly izotropní. Izotropie jehly znamená, že libovolnou ploškou o plošném obsahu $d\mu$ umístěnou na povrchu jednotkové koule se středem v počátku souřadného systému prochází jednotkový vektor rovnoběžný s T s pravděpodobností p_1 . Pro p_1 platí relace (9.2.1).

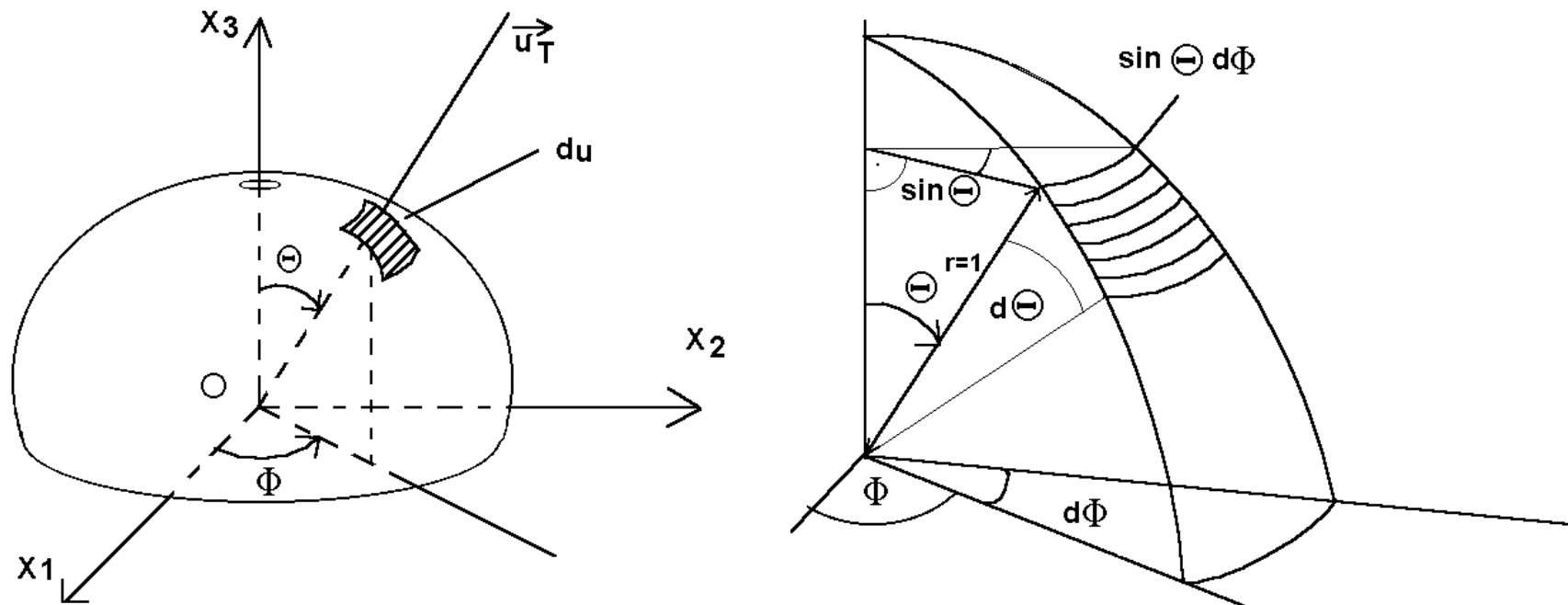
$$p_1 = \frac{d\mu}{2\pi r^2},$$

kde $r = 1$.



Obr. 9.2.1: Ploška $d\mu$ na povrchu jednotkové koule a izotropní orientace testovací jehly T .

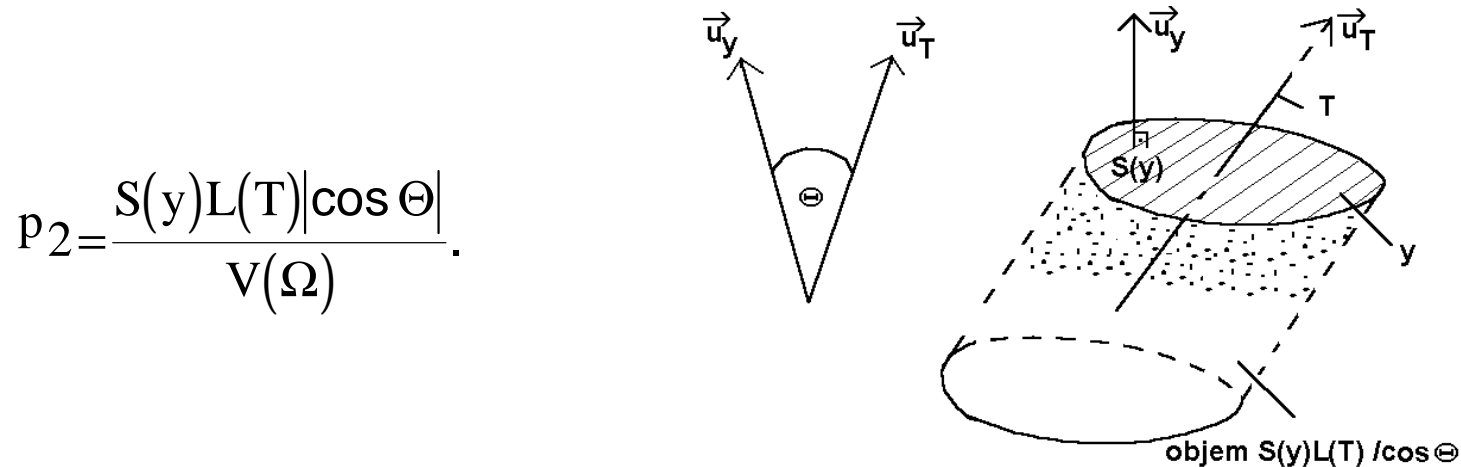
Plošný obsah $d\mu$ vyjádříme pomocí dvojice úhlů ϕ a Θ , které jsou znázorněny na obr. 9.2.2.



Z obrázků 9.2.2 plyne, že $d\mu = 1 \cdot \sin\Theta d\Phi d\Theta$. Proto

$$p_1 = \frac{\sin\Theta d\Phi d\Theta}{2\pi}$$

Uvažujeme nyní o malé rovinné plošce y o plošném obsahu $S(y)$ obsažené v mnohem rozsáhlejší referenční oblasti Ω , ve které se současně nachází i rovnoměrně náhodná a izotropní jehla T . Pravděpodobnost p_2 , s jakou pevně orientovaná a rovnoměrně náhodná jehla T protne plošku y , je vyjádřena vztahem (9.2.3), viz obr 9.2.3.



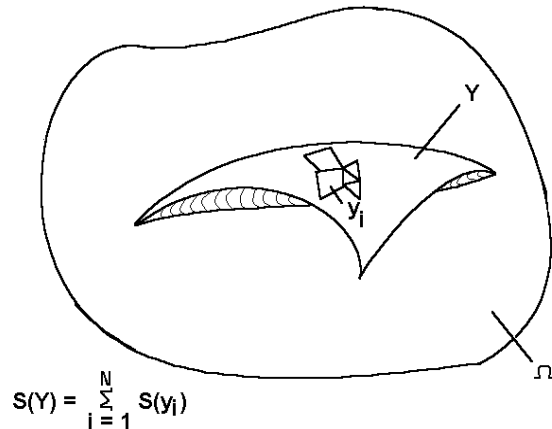
Obr. 9.2.3: Při pevné orientaci testovací jehly T je množství různých poloh testovací jehly s neprázdným průnikem s ploškou y úměrné objemu $V = S(y) L(T) / \cos \Theta$. Vektor \vec{u}_y je normálou k plošce y a vektor \vec{u}_T je jednotkový vektor ležící ve směru jehly T .

Při izotropní orientaci jehly je pak pravděpodobnost p zásahu plošky y jehlou T dána střední hodnotou p_2 pro

$\Phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\Theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pro střední hodnotu p_2 máme

$$\overline{p_2} = p = \frac{S(y)L(T)}{V(\Omega)} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{2\pi} \int_0^{\pi/2} |\cos \Theta| \cdot \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{2} \frac{S(y)L(T)}{V(\Omega)}.$$

Nyní si představme povrch Y jako sjednocení malých rovinných nadplošek y_1, y_2, \dots, y_N .



Obr. 9.2.4: Nadplocha Y je sjednocení malých nadplošek y_i .

Pro každou nadplošku i platí relace (9.2.4). Součtem pravděpodobností p_i pro každou nadplošku y_i nadplochy Y dostaneme

$$\sum_{i=1}^N p_i = \frac{1}{2} \frac{L(T)}{V(\Omega)} \sum_{i=1}^N S(y_i).$$

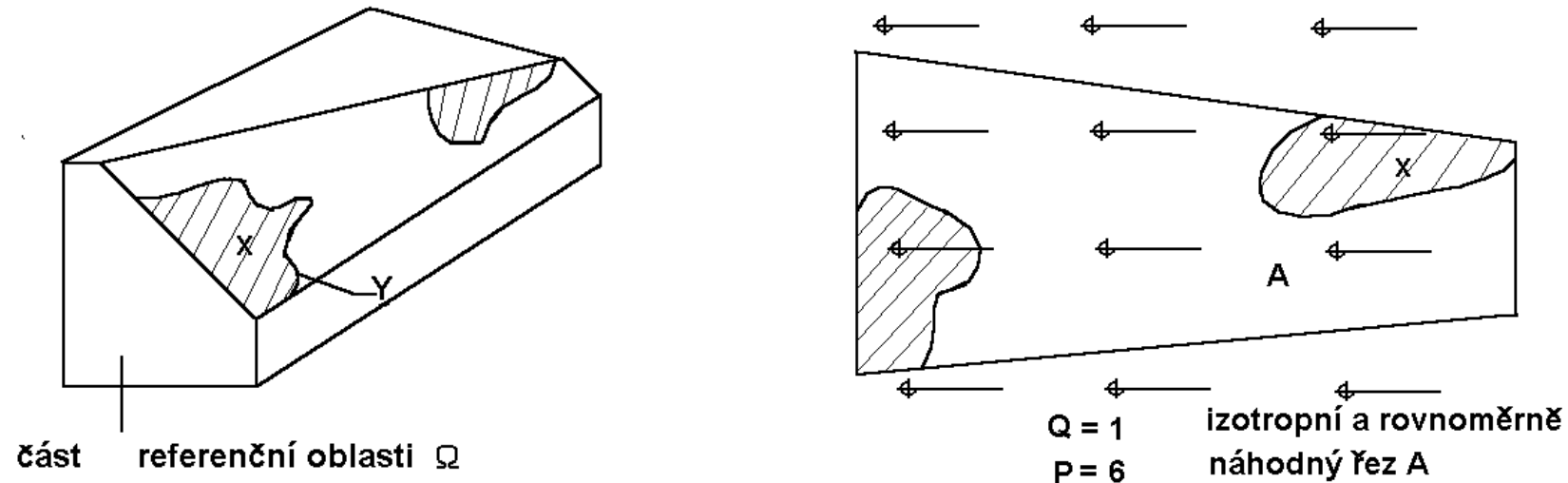
Součet $\sum_{i=1}^N S(y_i)$ má význam celkového plošného obsahu nadplochy Y . Součet $\sum_{i=1}^N p_i$ je možné odhadnout počtem průsečíků Q testovacích jehel celkové délky L s nadplochou Y . Potom odhadem plošného obsahu nadplochy $S(Y)$ je

$$[S(Y)] = \frac{2QV(\Omega)}{L}.$$

Pro poměrový odhad $\frac{[S(Y)]}{[V(\Omega)]}$ platí $\frac{[S(Y)]}{[V(\Omega)]} = \frac{2Q}{L}$, což souhlasí se dříve uvedeným vztahem (6.5.7).

Praktické určování velikostí plošného obsahu

Ze vzorku připravíme izotropní a rovnoměrně náhodný řez a přes něj přeložíme integrovaný testovací systém, jak je znázorněno na obr. 9.3.5.



Obr. 9.2.5: Izotropní a rovnoměrně náhodný řez, na kterém zjišťujeme počet průsečíků testovacích úseček (jehel) s hranicí Y objektu X. Počet průniků bodových sond s referenční oblastí na řezu A je značen P. Počet průniků testovacích jehel s hranicí Y je značen Q.

V odhadech $[S(Y)]$ a $[S(Y)]/[V(\Omega)]$ daných vztahy (9.2.6) a (9.2.7) určíme celkovou délku $L(\text{ref})$ testovacích jehel uvnitř referenční oblasti Ω pomocí načítání bodových sond uvnitř referenční oblasti řezu

$$L(\text{ref}) = L(T) P.$$

Pro odhad $S(Y) / V(\Omega)$ a $S(Y)$ můžeme použít i následující metody:
Z Buffonovy úlohy plyne

$$[L(Y)] = \frac{\pi S(A)Q}{2L},$$

kde $L(Y)$ je délka hranice objektu X na dvojrozměrném řezu, $S(A)$ je plošný obsah proměřované oblasti a L je celková délka testovacích linií, které pokrývají sledovanou oblast.

Z (9.2.6), (9.2.7) a (9.2.9) plyne

$$[S(Y)] = \frac{4 [L(Y)]}{\pi [S(A)]} V(\Omega), \quad \frac{[S(Y)]}{[V(\Omega)]} = \frac{4 [L(Y)]}{\pi [S(A)]}.$$

Plošný obsah $S(A)$ řezu A lze odhadovat jednorozměrnými sondami podle vztahu

$$[S(A)] = \frac{a}{L} L(\text{ref}).$$

Ve výše uvedeném vztahu představuje $L(\text{ref})$ celkovou délku testovacích jehel uvnitř řezu A , kterou odhadujeme součinem $L(T) \cdot P$. Symbolem a je označen plošný obsah základní oblasti testovacího systému, na kterou připadá sonda délky L .

9.3 Zjišťování délky křivky v trojrozměrném prostoru

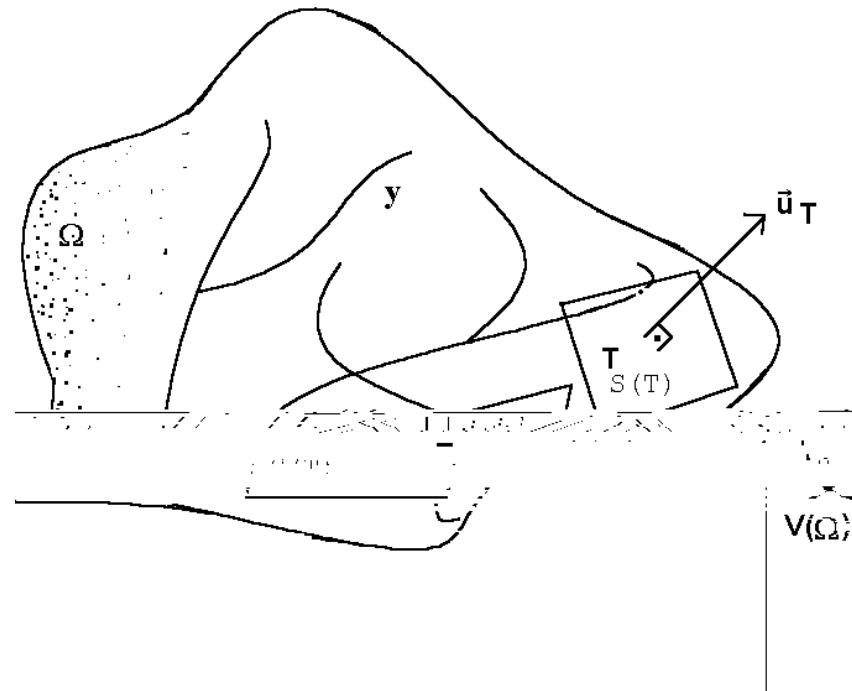
Uvažujeme hladkou a po částech spojitou křivku y délky $L(y)$, která je obsažena v referenčním objemu $V(\Omega)$. Tato křivka představuje vlákenný systém v trojrozměrném prostoru, kde průměry vláken jsou zanedbatelně malé.

Pro odhad délky křivky y uijeme plošku T známého plošného obsahu $S(T)$. Ploška T bude v referenčním objemu zaujímat náhodné pozice podle následujících pravidel:

(i) Pevný bod $X \in T$ je rovnoměrně náhodný v referenční oblasti Ω o objemu $V(\Omega)$.

(ii) Nezávisle na umístění T je orientace plošky T isotropně náhodná. Isotropií se zde rozumí to, že směr normálového vektoru \mathbf{u}_T k ploše T je isotropní v trojrozměrném prostoru.

O takové plošce T pak říkáme, že je rovnoměrně náhodná a isotropní v oblasti Ω .



Obr. 9.3.1: Referenční oblast Ω o objemu $V(\Omega)$ obsahuje vlákenný systém představovaný křivkou Y celkové délky $L(Y)$. Délku $L(Y)$ odhadujeme z počtů průsečíků křivky Y s testovací ploškou T o plošném obsahu $S(T)$.

Představme si nyní element y křivky Y o délce $L(y)$, který můžeme považovat za přímý a rovnoměrně náhodnou a současně isotropní plošku T nacházející se v referenční oblasti Ω . Úloha stanovení pravděpodobnosti průniku p elementu křivky a plošky T je stejná jako v předchozím odstavci 9.2 zabývajícím se měřením plošného obsahu nadplochy v trojrozměrném prostoru. Musíme pouze změnit $S(T)$ za $S(y)$ a $L(T)$ za $L(y)$.

Z (9.2.4) obdržíme po této záměně relaci

$$p = \frac{1}{2} \frac{S(T)L(y)}{V(\Omega)},$$

ze které získáme vztah pro odhad délky $[L(Y)]$ křivky Y sčítáním přes veškeré její elementární úseky y_i . Celkový počet těchto úseků skládajících křivku Y označme N .

$$[L(Y)] = \frac{2QV(\Omega)}{S},$$

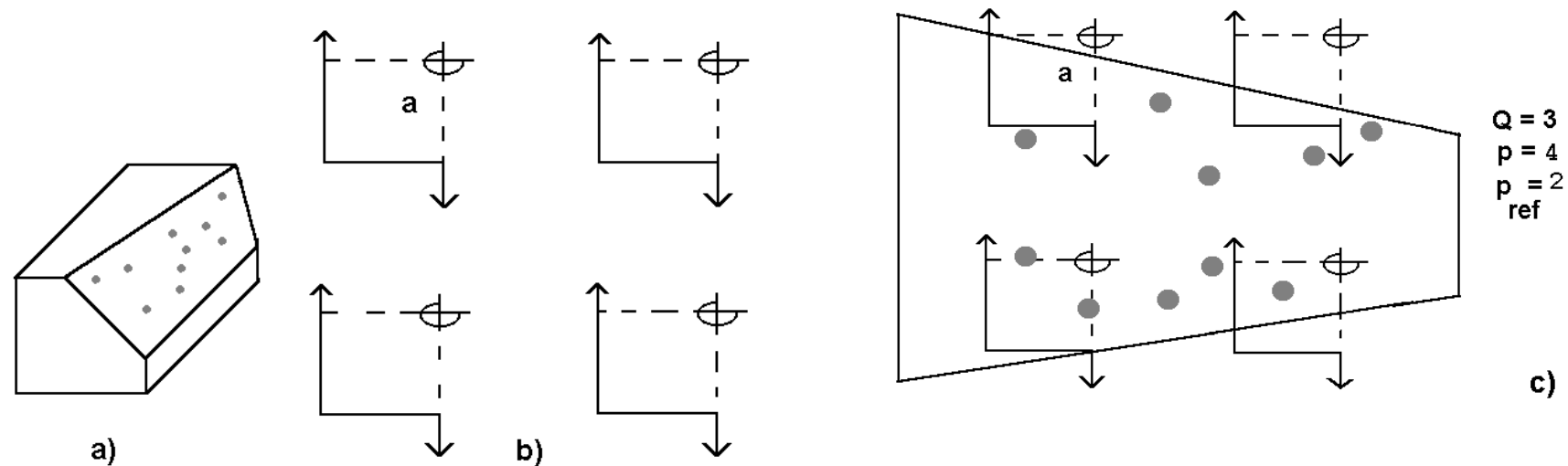
Kde S je celkový plošný obsah testovacích plošek.

Pro poměrový odhad $[L(Y)]/[V(\Omega)]$ platí

$$\frac{[L(Y)]}{[V(\Omega)]} = \frac{2Q}{S}.$$

Praktický postup při odhadu délky křivky ve 3d

Připravíme si isotropní a rovnoměrně náhodné řezy objektu. Použijeme testovacího systému s vylučovacími liniemi pro měření počtu částic ve 2d.



Obr. 9.3.2: (a) Isotropní a rovnoměrně náhodný řez objektu. (b) Testovací systém s vylučovací čarou. (c) Náhodná vzájemná poloha řezu a testovacího systému. Plošný obsah každé základní oblasti testovacího systému je roven a . Q značí počet objektů vnitřní struktury započítávaných testovacím systémem, p je celkový počet základních oblastí testovacího systému, p_{ref} značí počet základních oblastí, které mají nenulový průnik bodové sondy v jejich pravém horním rohu s řezem objektu.

Délku křivky vztaženou na jednotkový objem pak odhadujeme pomocí relace

$$\frac{[L]}{[V]} = \frac{2Q}{S} = \frac{2Q}{\frac{ap_{(\text{ref})}}{p}}$$

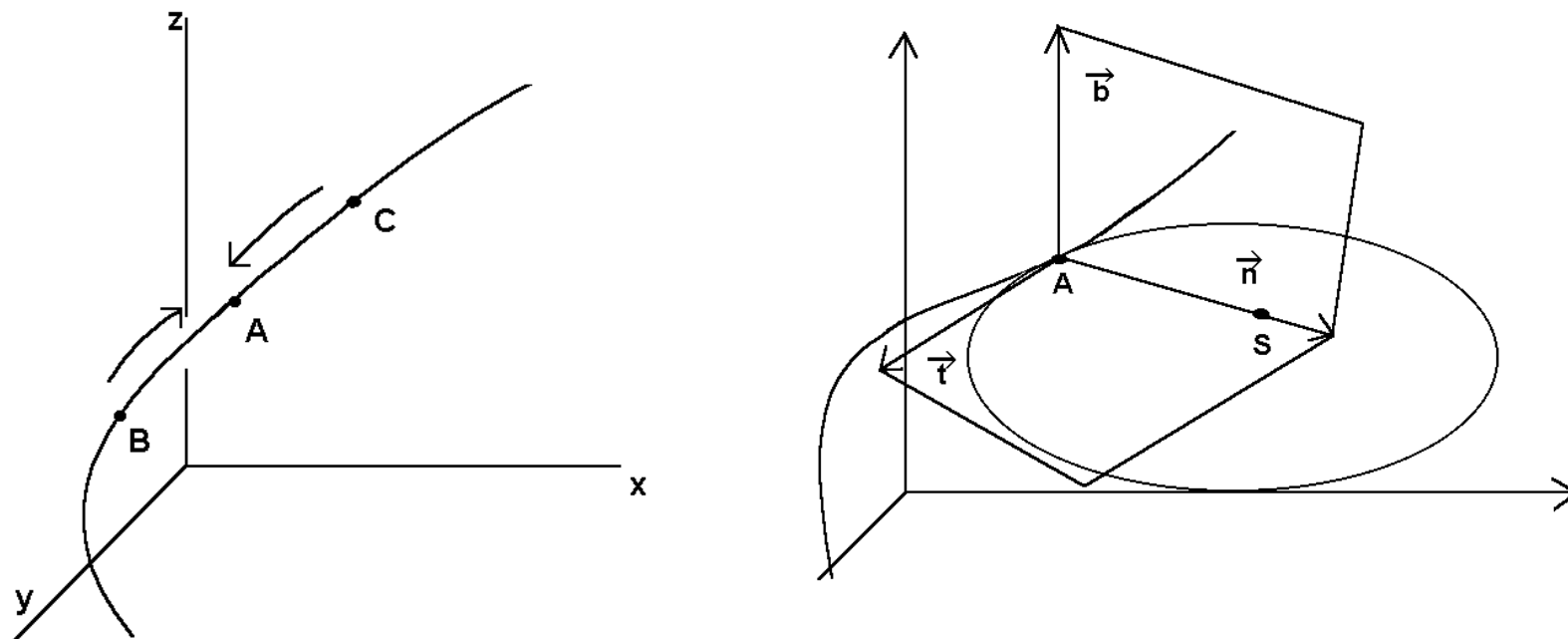
Ve vztahu (9.3.3) značí „a“ plošný obsah základní oblasti testovacího systému. Celkový počet objektů započítávaných při dané poloze testovacích systémů je Q. Celkový počet základních oblastí testovacího systému je označen p a p_{ref} je počet základních oblastí, ve kterých je počet objektů zjišťován.

9.4 Zjišťování střední hodnoty křivosti a torze lineárních strukturních prvků v 3d

Studium křivosti a torze vláken v objemných textiliích je motivováno jejich uplatněním v čalounickém a automobilovém průmyslu, kde jsou rozhodující mechanické vlastnosti textilního materiálu při stlačování. Právě tyto vlastnosti na změnách střední hodnoty křivosti a torze silně závisí. Metoda pro určení střední hodnoty křivosti a torze vláken uvedená v tomto odstavci je převzata od DeHoffa [2].

Nejprve definujme křivost a torzi lineárního strukturního prvku v trojrozměrném prostoru. Definice budou založeny na pojmech oskulační rovina, tečna, normála a binormála.

Křivost a torze jsou lokální charakteristiky lineárního strukturního prvku. Vyšetřujme proto okolí bodu A na křivce umístěné v 3d, jak naznačuje obr. 9.4.1.



Obr. 9.4.1: K určení křivosti a torze lineárního strukturního prvku.

Kromě bodu A umístíme na stejnou křivku další dva body B a C tak, že A se nachází mezi nimi. Tyto tři body jednoznačně určují kružnici jimi procházející. Limitní kružnice pro $B \rightarrow A$ a zároveň $C \rightarrow A$ se nazývá **kružnicí oskulační** v bodě A. Oskulační kružnice zároveň určuje oskulační rovinu. V této rovině leží normálový vektor \mathbf{n} , který je jednotkový, má počátek v bodě A a směr spojnice AS.

Jednotkový vektor ležící v oskulační rovině a zároveň kolmý k normále se nazývá tečný vektor ke křivce v bodě A. Ortogonální vektory \mathbf{n} a \mathbf{t} jednoznačně určují vektor \mathbf{b} , který je k nim kolmý, tento vektor se nazývá **binormálou** ke křivce v bodě A.

Posuneme-li bod A podél křivky o dráhu $d\lambda$ změní se orientace všech tří vektorů \mathbf{n} , \mathbf{t} a \mathbf{b} . Nové vektory s původními pak obecně svírají nenulové úhly. Úhel mezi původní a posunutou binormálou označme $d\gamma$ a úhel mezi tečnami $d\Theta$.

Křivost k v bodě A je definována jako

$$k = \frac{d\Theta}{d\lambda}$$

a pro torzi τ platí definiční vztah

$$\tau = \frac{d\gamma}{d\lambda}$$

Z uvedeného je patrné, že křivost souvisí se změnami orientace tečny a torze se změnami binormály.

Střední hodnota křivosti \bar{k}

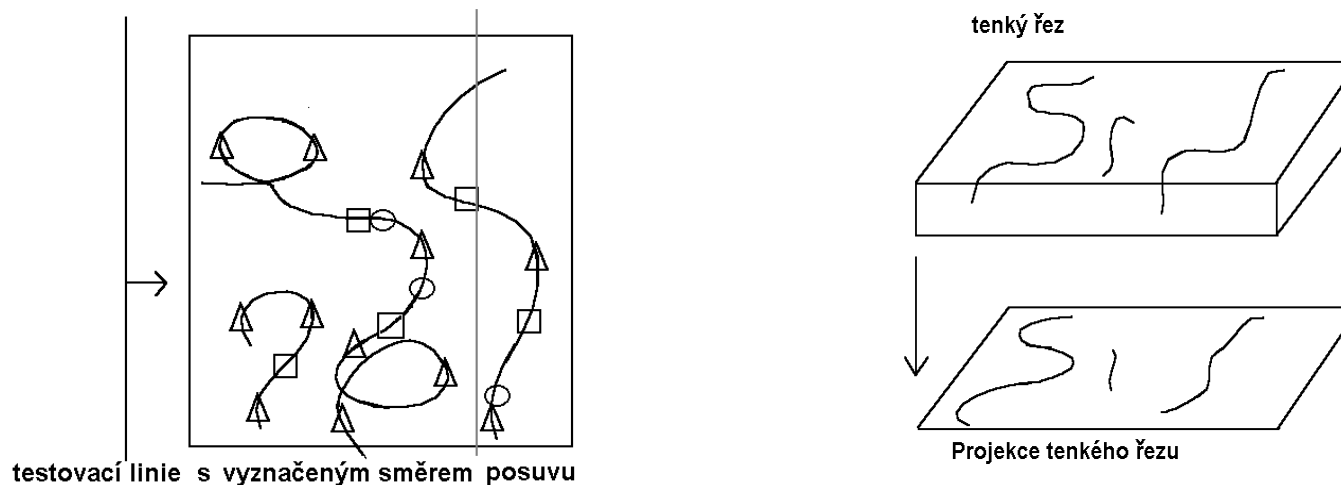
je definována jako střední hodnota křivosti k podél úseku křivky délky L .

$$\bar{k} = \frac{1}{L} \int_0^L k(\lambda) d\lambda$$

Podobně pro **střední hodnotu torze** $\bar{\tau}$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau(\lambda) d(\lambda)$$

Experimentální určování střední hodnoty křivosti a torze je založeno na sledování projekcí tenkých řezů vláknenných objektů tak, jak naznačuje obr. 9.4.2.



Obr.9.4.2: Projekce tenkého řezu obsahujícího lineární strukturní prvky (křivky, vlákna). Tečné polohy posuvné testovací linie a křivky jsou označeny Δ . Pro inflexní body byla zvolena značka \circ . Průsečíky s testovací linií jsou značeny o .

Střední hodnota křivosti \bar{k} a torze $\bar{\tau}$ se zjišťuje pomocí postupu značného na obr. 9.4.2. Nejprve věnujme pozornost střední hodnotě torze. Tu odhadujeme podle vztahu (9.4.5).

$$[\bar{\tau}] = \frac{\pi I_A}{2 N_L}$$

kde I_A je počet inflexních bodů připadajících na jednotkový plošný obsah projekce. Veličina N_L představuje počet průsečíků mezi rovnoměrně náhodnou a izotropní testovací linií a projekcí křivky, které připadají na jednotkovou délku této testovací linie. Střední hodnota křivosti se odhaduje relací

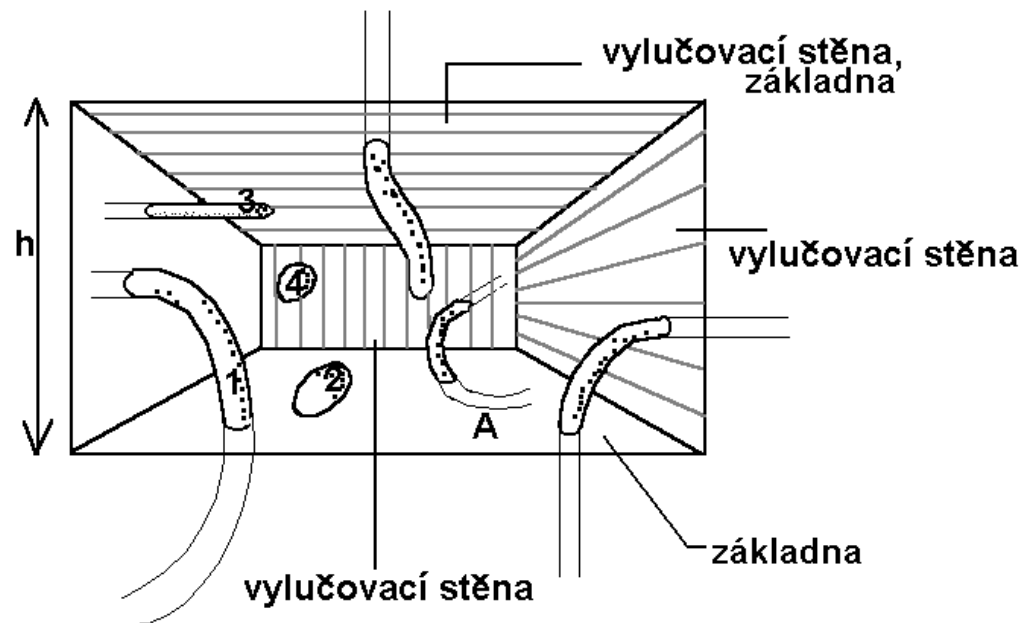
$$[\bar{k}] = \frac{\pi T_A}{2 N_L}.$$

Symbol T_A značí počet tečných poloh testovací linie 1 na jednotkovou plochu projekce. Při zjišťování počtu těchto tečných poloh je testovací linie posouvá přes projekci tak, že její směr je v každé poloze rovnoběžný s původním zvoleným směrem. Odhad zpřesňujeme středováním přes izotropně náhodné orientace tohoto původního směru.

9.5 Disektory

Zavedení disektorů do stereologie představuje skutečný přelom této vědní disciplíny [3]. Disektory lze bez nadsázky považovat za metodickou koncepci významově srovnatelnou s příspěvkem Dellesse a Glagoleva, které stály u zrodu samotné stereologie. Dellesseovu a Glagolevovu práci jsme zmínili v odstavci 6.5.

Z tab. 6.1.1 v odstavci 6.1 plyne, že počet částic lze zjišťovat jedině sondou trojrozměrnou. V předcházejících kapitolách však byla řeč jen o sondách dvou a méně rozměrných. Na rozdíl od toho (jak již bylo uvedeno) se disektory skládají z trojrozměrných sond. To je důvod, proč jsou „citlivým“ nástrojem pro zjišťování počtu částic. Metoda disektorů nevyžaduje jakékoli předpoklady o tvaru a velikosti sledovaných částic. Práci s disektorem vysvětlíme užitím obr. 9.5.1.



Obr. 9.5.1: Disektor: části tří vylučovacích stěn jsou označeny šrafováním. V objemu tohoto disektoru jsou započítávány čtyři částice. Výška disektoru (vzdálenost základen) je označena h .

Disektor si můžeme představit jako trojrozměrnou sondu ve tvaru hranolu. Základna hranolu nechť má plošný obsah $S(A)$, výšku hranolu budeme značit h . Objem disektoru je pak $V(\text{dis}) = S(A) \cdot h$. Důležitým prvkem disektoru je **vylučovací stěna**. Na obr. 9.5.1. jsou části vylučovacích stěn naznačeny šrafovaně. Vylučovací stěny jsou nekonečné roviny procházející třemi navzájem kolmými stěnami trojrozměrné sondy ve tvaru hranolu.

Vlastní práce s disektorem spočívá především v určení počtu částic N_V připadajících na objem $V(\text{dis})$. Do tohoto počtu zahrneme všechny částice, které splňují současně dva následující požadavky:

- 1) Částice má neprázdný průnik s oblastí disektoru ve tvaru hranolu.
- 2) Částice neprotíná žádnou vylučovací stěnu.

Celkem je v obr. 9. 5.1 $Q = 4$ započítávaných částic. Jsou to částice 1, 2, 3 a 4. Nestranným odhadem objemové hustoty částic N_V je pak veličina

$$[N_V] = \frac{Q}{V(\text{dis})}.$$

Obvykle provádíme měření na větším počtu disektorů, které mají stejný plošný obsah základen, ale různou výšku h . Údaje z jednotlivých disektorů lze buď sečíst a dělit celkovým objemem všech disektorů, nebo naměřené údaje zpracovat s vahou h . První odhad označujeme za slabě vychýlený, druhý je odhadem nestranným.

Pokud je studovaný materiál neprůhledný, provádíme pozorování pouze na dvou protilehlých stěnách disektoru. Tyto stěny musí být od sebe vzdáleny tak, že výška disektoru h , která je jejich vzdáleností, je menší než předem známá minimální šířka proměřovaných částic H_{\min} .

$$h < H_{\min}$$

Zmíněné stěny se nazývají **základny**. V jedné z nich probíhá měření (tj. načítání počtu částic) a druhá ze základen je srovnávací. Porovnáním polohy a tvaru částic v základnách dovolí i v neprůhledném disektoru rozhodnout o výše uvedených požadavcích 1) a 2) pro načítání počtu částic.

9.6 Frakcionátory

V celé řadě případů se nedaří připravit trojrozměrné sondy známých rozměrů. S dostatečnou přesností nejsme zpravidla schopni určit výšku disektoru. Tyto potíže můžeme obejít použitím frakcionátoru.

Frakcionátor uvedený ve [3] zobecňuje princip disektoru, a je snad nejjednodušší stereologickou metodou. Díky své jednoduchosti je velmi účinným nástrojem pro zjišťování počtu izolovaných částí objektů.

Při použití **frakcionátoru** postupujeme tak, že studovaný objekt rozdělíme na libovolný počet N dílů. Díly mohou být libovolného tvaru i objemu. Zadáme pravidlo, které zajistí aby každá částice obsažená uvnitř dílu byla započítávána právě jednou. Nalezení tohoto pravidla je klíčovým bodem pro použití frakcionátoru. Dále provedeme prostý výběr m dílů z celkového počtu N . Za nestranný odhad celkového počtu Q částic ve vzorku použijeme

$$[Q] = \frac{N}{m} Q_m,$$

kde Q_m je střední počet částic připadajících na jeden díl z prostého výběru $m < N$ dílů.

$$Q_m = \frac{\sum_{i=1}^m Q_i}{m},$$

kde Q_i je počet částic v i -tém dílu. Známe-li celkový objem vzorku V , můžeme odhadnout hustotu částic $N_V = Q/V$.

V případě frakcionátoru nemusíme vůbec znát rozměry trojrozměrné sondy. Záleží pouze na tom, aby vzorky byly odebírány z celého objektu a aby výběr dílů byl prostý. Rozptyl hodnot frakcionátoru je obecně značný. Proto je účelné volit rozměry dílů tak, aby rozdíly mezi jednotlivými hodnotami Q_i byly co nejmenší.